Leçon 181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Cadre : On se place dans un espace affine réel E de dimension $n < +\infty$, et on note V l'espace vectoriel associé.

1. Barycentres. —

1. *Définitions et premières propriétés.* —

- Def : Un système de points pondéré est la donnée de d couples $(A_i, \lambda_i) \in E \times \mathbb{R}$ pour $d \geq 1$, avec $\lambda_1 + \dot{+} \lambda_d \neq 0$.
- Def : Fonction de Leibniz
- Pro : La fonction de Leibniz est constante ou bijective
- Def : Le barycentre d'un système de points pondérés est un point G tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
- Def : L'isobarycentre de points $A_1, \ldots, A_d$ est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \frac{1}{d})$.
- Pro : Le barycentre est homogène, commutatif.
- Pro : Le barycentre est associatif.
- App : Construction d'un barycentre à la règle et au compas
- App : Isobarycentres du triangle (centre de gravité), du tétraèdre (aux 3/4 de chaque segment reliant sommet et centre de gravité de la face opposée), et du parallélogramme.

2. *Liens avec la structure affine.* —

- Def : Soit $A \subset E$. Le sous-espace affine engendré par A est le plus petit sous-espace affine de E contenant A.
- Pro : Si A est non-vide, le sous-espace affine engendré par A, $Aff(A)$, est l'ensemble des barycentres de A.
- App : Si A est la réunion de deux points, $Aff(A)$ est une droite affine. Si A est la réunion de trois points non alignés, $Aff(A)$ est un plan affine.
- Pro : F est un sous-espace affine ssi F est stable par barycentration.
- Def : Soient E,E' des espaces affines sur V,V'. Une application $f : E \to F'$ est une application affine s'il existe $v_f : V \to V'$ linéaire telle que $\forall M \in E$, $\forall \overrightarrow{x} \in V$, $f(M + \overrightarrow{x}) = f(M) + v_f(\overrightarrow{x})$, càd : $f \circ t_{\overrightarrow{x}} = t_{v_f(\overrightarrow{x})} \circ f$.
- Pro : Pour E' espace affine, une application $f : E \to E'$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.
- App : Si f est une application affine, alors $Aff(f(A)) = f(Aff(A))$.

3. *Repérage.* —

- Def : Une famille de points $(A_i)_i$ est affinement libre si $\forall i$, A_i n'est pas dans l'espace affine engendré par les A_j, $j \neq i \Leftrightarrow \forall i$, A_i n'est pas un barycentre des A_j, $j \neq i \Leftrightarrow$ pour un i, la famille des $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\neq i}$ est libre $\Leftrightarrow$ pour tout i, la famille des $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\neq i}$ est libre.
- Def : Une famille de points de E est un repère affine ssi elle est affinement libre et si $\overrightarrow{A_0A_i}_{i>0}$ est une base de V. On a alors $E = A_0 + Vect(\{\overrightarrow{A_0A_i}, i \in \{1, \dot{;} n\}\})$.
- Rem : Cette construction est très similaire aux bases d'espaces vectoriel.
- Def : Pour $\{A_0, \dot{;} A_n\}$ repère affine de E, et $M \in E$, les coordonnées barycentriques de M sont un (n+1)-uplet $(\lambda_0, \dot{;} \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que M est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_i$.
  On dit que les coordonnées barycentriques de M sont normalisées si $\lambda_0 + \dot{+} \lambda_n = 1$.
- Pro : Tout point M admet un unique système de coordonnées barycentriques normalisées.
- Def : Aire algébrique
- Thm/Méthode : Pour A,B,C base algébrique d'un plan affine, les aires algébriques de MBC,MCA,MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

4. *Applications des barycentres dans un plan affine.* —

- App : Calcul de coordonnées barycentriques de certains points remarquables d'un triangle :
  i) Centre de gravité/intersection des médianes : $(1, 1, 1)$
  ii) Centre du cercle inscrit/intersection des bissectrices : (a, b, c)
  iii) Centre du cercle circonscrit/intersection des médiatrices : $(sin(2\alpha), sin(2\beta), sin(2\gamma))$
  iv) Orthocentre/intersection des hauteurs : $(tan(\alpha), tan(\beta), tan(\gamma))$
- Def : Pour P,Q,R trois points alignés, avec R,Q distincts de P, on peut définir le rapport de mesures algébrique $\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ comme le seul scalaire vérifiant $\overrightarrow{PR} = (\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}).\overrightarrow{PQ}$.
- Théorème de Ceva : Soient A,B,C non-alignés et D,E,F distincts de A,B,C et respectivement sur $[BC]$,$[CA]$,$[AB]$.
  Alors les droites (AD),(BE),(CF) sont concourantes ssi $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$.
- Théorème de Melanüs : Soient A,B,C non-alignés et D,E,F distincts de A,B,C et respectivement sur (BC),(CA),(AB).
  Alors les points D,E,F sont contenus dans une droite affine ssi $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$.
- Def : Conique en coordonnées barycentriques.
- Pro : Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.
- **Dev :** (Corollaire du théorème de Pascal) Soient A,B,C trois points du plan non-alignés. Soient M,N des points du plan tels que les droites (AM),(BM),(CM), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points M_A,M_B,M_C et que les droites (AN),(BN),(CN), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points N_A,N_B,N_C.
  Alors il existe une conique passant par M_A,M_B,M_C,N_A,N_B,N_C.

2. Convexité. —

1. *Définition.* —

- Def : Pour $x_1, \dot{;} x_d \in V$, $\lambda_1, \dot{;} \lambda_d \in [0, 1]$ tq $\lambda_1 + \dot{+} \lambda_d = 1$, la combinaison convexe des x_1 avec les λ_i est le vecteur $\lambda_1.x_1 + \dot{+} \lambda_d.x_d$.

- Def : Une partie A de V est étoilée s'il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in A$, toute combinaison convexe de x et de y est dans A.
- Def : ne partie A est convexe ssi pour tous $x, y \in A$, toute combinaison convexe de x et de y est dans A, ce qui est équivalent à dire que toute combinaison convexe d'éléments de A est dans A.
- Rem : Une partie convexe est étoilée.
- Ex : Pour $\|.\|$ une norme sur V, la boule unité de V pour $\|.\|$ est convexe.
- Ex : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq exp(x)\}$ est convexe.
- Def : Une partie A de E est étoilée si pour un $M \in E$, $(\overrightarrow{MN})_{N\in A}$ est une partie étoilée de V.
  Une partie A de E est convexe si pour un $M \in E$, $(\overrightarrow{MN})_{N\in A}$ est une partie convexe de V.
- Pro : L'image directe et l'image réciproque d'une partie convexe d'un espace affine par une fonction affine sont convexes.

2. *Enveloppe convexe.* —

- Def d'une enveloppe convexe : Plus petit convexe contenant A. C'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.
- L'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée.
- L'enveloppe convexe d'un ensemble compact est compacte.
- L'enveloppe convexe d'un ouvert et ouverte.
- Contre-ex : L'enveloppe convexe du fermé $\{(0,0\} \cup \{(x,y) \text{ tq } x > 0, y > 0 \text{ et } y \geq \frac{1}{x}\}$ est $\{(0,0\} \cup \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ qui n'est pas un fermé.
- Théorème de Carathéodory : En dimension n, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus n+1 points de A.
- Théorème de Gauss-Lucas : Pour P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des zéros de P' est dans l'enveloppe convexe des zéros de P. (Lorsque P est dans $\mathbb{R}[X]$ et scindé, le théorème de Rolle nous donne ce résultat)
- **Dev** : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.

3. *Points extrémaux.* —

- Def : Point extrémal d'une partie convexe.
- Ex : Les points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
- Pro : Une partie convexe A privée de ses points extrémaux reste convexe.
- Propriété des points extrémaux.
- Théorème de Krein-Milman.

4. *Projection et séparation.* —

- Théorème de projection sur un convexe fermé.
- Théorème de Motzkin : Soit C une partie de V. Si pour tout $x \in E$, il existe un unique y de C tel que $\|x - y\| = d(xC)$, alors la partie C est un convexe de V.
- Def : Séparation au sens large. Séparation stricte.
- Théorème de Hahn-Banach géométrique.
- Contre-ex à Hahn-Banach..
- Rem : On démontre le théorème de Krein-Milman avec.

Références

Mercier (Cours de géométrie)/Ladegaillerie : Barycentres, propriétés. Liens avec les sous-espaces affines. Repères affines, propriétés. Image d'un convexe par une fonction affine.
Truffault : Aire algébrique, propriété, exemples. Th de Ceva, Th de Melanüs.
Tauvel (Géométrie) : Combinaison convexe, partie étoilée, convexe, exemples. Enveloppe convexe, propriétés, exemples, Th de Carathéodory. Th de Gauss-Lucas. Points extrémaux, propriétés, Th de Krein-Milman : Th de Hahn-Banach, exemples.
Szpirglas : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.(Dev)
Eiden : Corollaire du théorème de Pascal.(Dev)

June 3, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes